

# PENENTUAN RADIUS BULIR DARI FOTOMETRI ASTRONOMI: PERBANDINGAN TIGA METODE BERBASIS MODEL MIE

Nuning Nurainii, Hakim L. Malasan<sup>2</sup>, Tri W. Hadi<sup>3</sup>  
<sup>1</sup>Departemen Matematika, FMIPA, ITB  
<sup>2</sup>Departemen Astronomi, FMIPA & KPP MIT, ITB  
<sup>3</sup>Departemen Geofisika dan Meteorologi, FIKTM, ITB

## ABSTRACT

This paper discusses modeling steps of the total extinction coefficients, deduced from the astronomical photometric observations, to estimate aerosol particulate size in the atmospheric layer. One important step in modeling is the application of Mie theory through Wempe's extinction law for aerosol and introduced by Angstrom (1929), i.e.

$$k_D(\lambda) = 2.5 \log e^{-\beta \lambda^{-\alpha}}, \text{ model equation } K_{ext} = \int_0^{\infty} \pi a^2 Q_{ext} N(a) da, \text{ and the model}$$

$$\log K_{\lambda} = \log \langle S_{\lambda} \rangle + \log \left[ 1.086 \int_0^{\infty} N_a da \right].$$

The factor  $Q_{ext}$  is derived by elaborating Mie theory, through extinction efficiency factor which has been normalized, and an assumption that particle size is represented by a log-normal distribution. Final result of aerosol radius is deduced by fitting a decomposed observed extinction coefficient with that computed using the three Mie theory developed to estimate the best aerosol particulate's size.

## ABSTRAK

Makalah ini membahas langkah-langkah pemodelan data koefisien ekstingsi total yang merupakan hasil pengamatan fotometri astronomi untuk menaksir radius bulir aerosol di lapisan atmosfer. Salah satu tahapan pemodelan dengan mengaplikasikan teori Mie lewat persamaan hukum ekstingsi Wempe untuk aerosol yang pertama kali diperkenalkan oleh Angstrom (1929), yaitu

$$k_D(\lambda) = 2.5 \log e^{-\beta \lambda^{-\alpha}}, \text{ persamaan model } K_{ext} = \int_0^{\infty} \pi a^2 Q_{ext} N(a) da,$$

$$\text{dan model } \log K_{\lambda} = \log \langle S_{\lambda} \rangle + \log \left[ 1.086 \int_0^{\infty} N_a da \right]$$

Faktor  $Q_{ext}$  diturunkan dari elaborasi teori Mie, melalui faktor efisiensi ekstingsi yang dinormalkan, serta mengasumsikan ukuran partikel yang berdistribusi log-normal. Hasil akhir radius bulir aerosol diturunkan dari *fitting* dekomposisi koefisien ekstingsi lewat pengamatan dan hasil perhitungan lewat ketiga metode teori Mie yang dikembangkan guna mendapatkan estimasi besar bulir aerosol terbaik.

**Kata kunci :** dekomposisi, teori Mie, efisiensi ekstingsi, radius bulir

# 1 PENDAHULUAN

Saat melalui lapisan-lapisan atmosfer, cahaya mengalami peredaman (*atmospheric extinction*) termasuk pada lapisan tempat beradanya polutan (2-4 km dari permukaan bumi). *Atmospheric extinction* itu sendiri adalah reduksi dari intensitas radiasi sebagai akibat penyerapan (absorpsi) dan penyebaran cahaya (*scattering*) oleh partikulat dalam atmosfer bumi. Selain terjadi pada lapisan yang memang berfungsi untuk mengurangi intensitas matahari agar menjadi sinar yang diterima oleh manusia (misalnya lapisan Ozone dan Rayleigh banyak menyerap ultraviolet yang dapat mengakibatkan penyakit kanker), juga terjadi pada lapisan tempat beradanya polutan, yaitu lapisan aerosol.

Intensitas peredaman yang terjadi dipengaruhi oleh bentuk partikel dan distribusi partikel polutan. Sebagai titik awal pembatasan masalah dalam makalah ini titik berat diberikan pada polutan aerosol *soot* yang merupakan produk dari aktivitas manusia sehari-hari. Dengan asumsi bentuk partikel aerosol yang digunakan adalah sferis (bulir) dan partikel yang ditinjau homogen, hal ini memberikan sifat yang khas dalam menghadapi cahaya yang serupa.

Dalam makalah ini dikembangkan tiga metode yang berbeda untuk mendapatkan koefisien ekstingsi aerosol di atmosfer. Dari ketiga metode ini diharapkan akan didiskusikan metode yang paling tepat yang sesuai dengan tipe data yang diperoleh dari pengamatan fotometri astronomi. Fotometri astronomi itu sendiri merupakan observasi fundamental astrofisika dalam rangka menera terang obyek langit, baik sumber-titik (*point-sources*) maupun membentang (*extended object*).

## 2 METODE DAN DATA

Pada prinsipnya teori Mie dipergunakan untuk menurunkan hubungan antara koefisien ekstingsi aerosol dengan radius bulir. Teori ini meninjau cahaya dalam bentuk gelombang terpolarisasi linier, yang tiba pada suatu debu sferis yang isotropik dengan radius  $a$ . Energi yang tiba ini akan hilang akibat serapan (konversi energi pancaran ke energi internal bulir) dan sebaran. Pada prinsipnya penyelesaian formulasi Mie ini adalah solusi persamaan Maxwell bagi gelombang elektromagnetik dengan syarat batas yang cukup bagi permukaan sferis. Problem ini secara fisis dipecahkan antara lain oleh Mie (1908), Debye (1909) dan disarikan oleh Van den Hulst (1981). Secara detail aspek komputasi teori Mie diberikan dalam Barber 8B Hill (1992).

### 2.1 Metode I

Metode pertama ini memberikan suatu formulasi untuk ekstingsi pada gelombang monokromatik antara 0.38  $\mu\text{m}$  - 0.65  $\mu\text{m}$ , yang kerap disebut dengan hukum ekstingsi Wempe dan pertama kali diperkenalkan oleh Angstrom (1929) sebagai berikut:

$$k_D(\lambda) = 2.5 \log e^{-\beta \lambda^{-\alpha}} \dots\dots\dots (2-1)$$

Keterangan:

$a$  : koefisien aerosol

$P$  : faktor turbiditas untuk *altitude* (ketinggian dari permukaan laut) yang berbeda untuk mengamati  $f_{co}(A)$

Umumnya pada literatur saat ini digunakan nilai rata-rata  $a \cdot 1.33$  (ditentukan oleh Siedentopf, 1948), dan  $f_i^m$  yang sekaligus merupakan faktor penskalaan normalisasi. Ini dikarenakan pemodelan persamaan (2-1) yang sangat bergantung pada nilai  $a$  dan faktor  $f_i$  yang tidak terlalu berpengaruh secara matematis, di samping  $a$  lebih merupakan hasil empiris.

## 2.2 Metode II

Metode ini merupakan elaborasi dari teori Mie dengan menghitung faktor efisiensi ekstingsi yang dinormalisasi (Van den Hulst 1970, Barber 8B Hill 1992) sebagai berikut

$$Q_{\lambda}^{\text{ext}} = \frac{S_{\lambda}}{\pi a^2} \text{ atau } Q_{\lambda}^{\text{ext}} = \frac{S_{\lambda,a}}{\pi a^2} \dots\dots\dots (2-2)$$

sehingga

$$A_{\lambda} = 1.086 N Q_{\lambda}^{\text{ext}} \pi a^2 \dots\dots\dots (2-3)$$

Dalam bentuk ternormalisasi, dapat ditunjukkan,

$$\langle S_{\lambda} \rangle = \frac{\int_0^{\infty} S_{\lambda,a} N_a da}{\int_0^{\infty} N_a da} \dots\dots\dots (2-4)$$

sehingga dalam bentuk logaritma

$$\log A_{\lambda} = \log \langle S_{\lambda} \rangle + \log \left[ 1.086 \int_0^{\infty} N_a da \right] \dots\dots\dots (2-5)$$

Distribusi ukuran partikel yang digunakan dalam perhitungan pada makalah ini diberikan oleh Mischenko et al. (1999) sebagai distribusi log-normal sebagai berikut :

$$N(a) = \text{const} \times a^{-1} \exp\left(-\frac{(\ln a - \ln a_g)^2}{2 \ln^2 \sigma_g}\right) \dots\dots\dots (2-6)$$

Konstanta pada persamaan distribusi di atas dipilih sehingga memenuhi normalisasi baku,

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} N(a) da = 1 \dots\dots\dots (2-7)$$

Sebagai ilustrasi dalam kasus polusi natural (debu vulkanik), partikel dan indeks optik (dinyatakan dalam bentuk  $m = n - k i$ ) yang ditinjau adalah Silikat ( $m \approx 1.6 - 0.01 i$ ) dan Grafit ( $m \approx 2.5 - 1.5 i$ ).

Pemilihan distribusi log-normal direalisasikan dengan meninjau,  $\langle a \rangle$  yang diekspresikan sebagai radius menengah geometrik jumlah partikel. Nilai  $a = 2$  umumnya diamati (Butcher & Charlson 1972; Chuan et al. 1981; Farlow et al. 1981). Biasanya nilai menengah radius yang dipergunakan dalam analisis adalah radius menengah geometrik volume partikel  $\langle a \rangle$  yang berkaitan dengan  $a_g$  sebagai

$$\langle a \rangle = r_g \exp(3m^2 \sigma) \dots \dots \dots (2-8)$$

### 2.3 Metode III

Dalam metode yang ketiga ini, perhitungan konstanta Aerosol didapatkan dengan formulasi

$$K_{ext} = \int_0^{\infty} \pi a^2 Q_{ext} N(a) da \dots \dots \dots (2-9)$$

dengan faktor  $Q_{ext}$  diturunkan dari teori Mie, melalui faktor efisiensi ekstingsi yang dinormalisasi, serta mengasumsikan ukuran partikel yang berdistribusi log-normal. Nilai  $N(a)da$  diasumsikan memenuhi:

$$\frac{dN}{da} = \sum_{j=1}^3 \frac{N_j}{\sqrt{2\pi a \ln \sigma_j}} \exp \left[ - \left( \frac{\lg a - \lg \rho_j}{\sqrt{2 \lg \sigma_j}} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (2-10)$$

Persamaan ini berikut nilai konstanta yang ada di dalamnya diperoleh dari Riemann et al. (1992).

Tabel2-1: HASIL PERHITUNGAN  $Q_{ext}$  UNTUK RADIUS BULIR 0.3 nm DENGAN MASUKAN DISTRIBUSI LOG-NORMAL, RADIUS MENENGAH GEOMETRI 0.3, NILAI  $\ln(a_g)^2 = 0.2$  , INDEKS REFRAKSI  $1.29+0.05^*$

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$Q_{ext}$	$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$Q_{ext}$
0.20	2.43	1.70	0.72
0.35	2.70	1.85	0.63
0.50	2.59	2.00	0.55
0.65	2.27	2.15	0.48
0.80	1.93	2.30	0.43
0.95	1.62	2.45	0.39
1.10	1.36	2.60	0.35
1.25	1.15	2.75	0.31
1.40	0.98	2.90	0.28
1.55	0.83	3.05	0.26

Dalam makalah ini nilai  $Q_{ext}$  untuk metode kedua dan ketiga diperoleh dari program komputasi oleh Mischenko et.al (1999). Masukan yang digunakan dalam program ini meliputi besarnya radius bulir berikut ketidakpastiannya,

distribusi radius bulir, radius menengah geometrik serta indeks refraksi, dengan hasil yang disajikan pada Tabel 2-1.

## 2.4 Dekomposisi Data

Data yang diturunkan dari fotometri astronomi pada hakekatnya adalah koefisien ekstingsi total,  $k(\lambda)$ . Nilai  $k(\lambda)$  ini direduksi untuk memperoleh nilai koefisien ekstingsi aerosol,  $k_D(\lambda)$  melalui persamaan komposisi ekstingsi,

$$k(\lambda) = k_R(\lambda) + k_{Oz}(\lambda) + k_D(\lambda) \dots\dots\dots (2-11)$$

Keterangan:

- $k(\lambda)$  : koefisien ekstingsi total yang terdiri dari
- $k_R(\lambda)$  : koefisien ekstingsi pada lapisan Rayleigh
- $k_{Oz}(\lambda)$  : koefisien ekstingsi pada lapisan Ozon
- $k_D(\lambda)$  : koefisien ekstingsi pada lapisan Aerosol

Rumus empiris untuk  $k_{Oz}(\lambda)$  dan  $k_R(\lambda)$  yang telah dibakukan oleh Bessel (1992) dan diberikan sebagai berikut

$$k_{Oz}(\lambda) = (1.11)(0.25)(2.5) \{ 1210 \exp[-131(\lambda - 0.26)] + 0.055 \exp[-188(\lambda - 0.59)^2] \}$$

$$k_R(\lambda, h) = (9.4977 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 B^2 \exp\left(\frac{-h}{7.996}\right) \dots\dots\dots (2-12)$$

$$\text{dengan } B = 0.223465 + \frac{1.076 \times 10^2}{146 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} + \frac{0.93161}{41 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}$$

Satuan X dinyatakan dalam /an dan nilai X yang dimaksud adalah nilai tengah rentang panjang gelombang untuk masing-masing filter *UBV*,  $X_u = 0.35$  /an,  $X_B = 0.45$  /an,  $X_v = 0.55$  /an (Malasan & Raharto 1993). Parameter *h* merupakan ketinggian tempat pengamatan dari permukaan laut dinyatakan dalam satuan kilometer (untuk Observatorium Bosscha,  $h = 1.33$  km). Sehingga dalam satu kali pengamatan, diperoleh tiga nilai koefisien ekstingsi aerosol setelah koefisien ekstingsi totalnya didekomposisi.

## 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil-hasil perhitungan dekomposisi data serta berbagai nilai konstanta Aerosol disajikan secara grafts yang dilakukan dengan program MATLAB®. Sebagai contoh kasus digunakan koefisien ekstingsi total dari pengamatan tahun 1989, mengingat cuplik data representatif untuk digunakan dalam perhitungan dengan berbagai metode yang disajikan dalam makalah ini. Seperti yang telah dikemukakan oleh Malasan & Raharto (1993), koefisien ekstingsi ini merupakan hasil penurunan dari data pengamatan fotometri *UBV* bintang standar koefisien ekstingsi, dengan fotometer fotoelektrik tipe DC yang dipasang pada refraktor Bamberg 37 cm (//18) di Observatorium Bosscha, ITB, Lembang.

### 3.1 Dekomposisi data

Data yang akan diolah disajikan dalam Tabel 3-1. Dari data ini selanjutnya akan dihitung kurva dekomposisi melalui formula (2-11). Gambar 3-1 memperlihatkan hasil dekomposisi ini.

Tabel 3-1: KOEFISIEN EKSTINGSI FOTOMETRI OBSERVATORIUM BOSSCHA 1989 (MALASAN & RAHARTO 1993)

JD 244...	$k_U$	$\sigma_{k_U}$	$k_B$	$\sigma_{k_B}$	$k_V$	$\sigma_{k_V}$
2767	0.661	0.014	0.402	0.01	0.253	0.007
2768	0.950	0.083	0.764	0.086	0.547	0.073
2791	0.672	0.076	0.389	0.061	0.219	0.058
2804	0.87	0.074	0.601	0.08	0.465	0.104
2805	0.708	0.024	0.449	0.022	0.294	0.023
2806	0.810	0.020	0.513	0.015	0.334	0.012
2825	0.973	0.025	0.643	0.019	0.421	0.014
2833	0.723	0.039	0.442	0.032	0.267	0.023

Keterangan: JD = Julian Data

Hasil kurva dekomposisi ekstingsi pada Gambar 3-1, mengindikasikan bahwa data ekstingsi hasil pengamatan memiliki kecenderungan yang sama dengan hasil perhitungan, yaitu monoton turun secara eksponensial. Pada gambar tersebut data pengamatan, dinotasikan dengan tanda bintang, karena kita bekerja dengan tiga panjang gelombang  $U$ ,  $B$ , dan  $V$ . Terlebih dahulu data pada Tabel 3-1, diolah dengan mencari rata-rata bobotnya melalui rumus

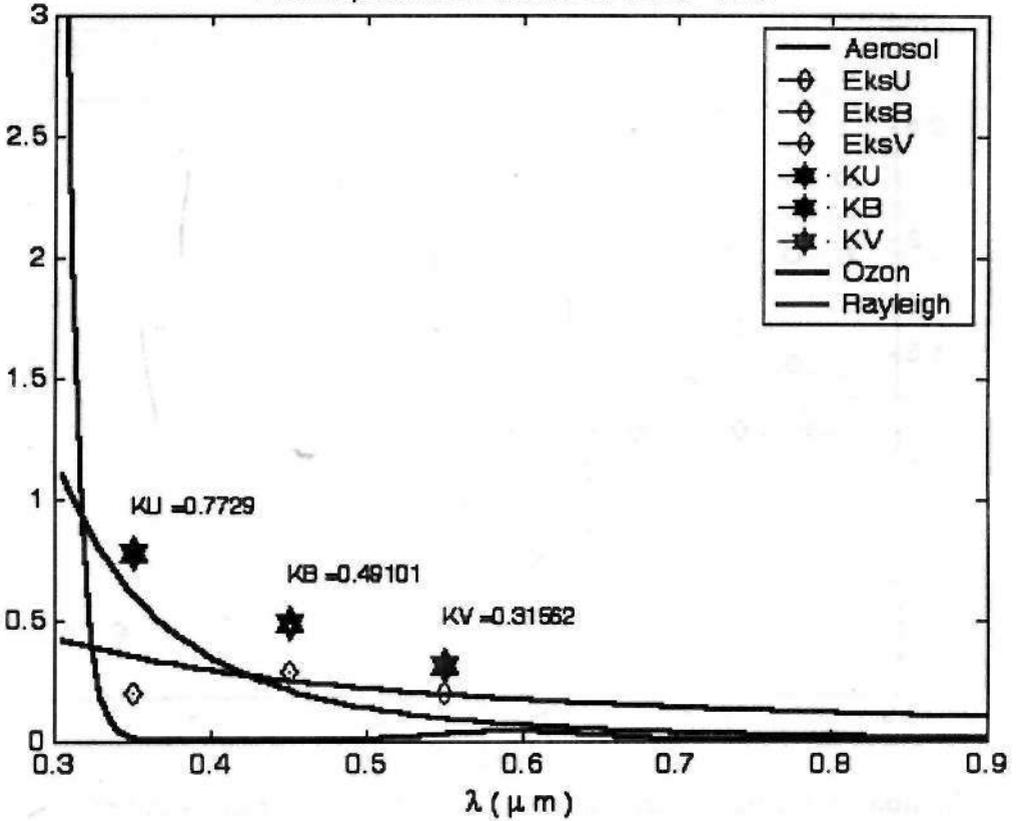
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i w_i}{\sum_{i=1}^3 w_i}, \quad w_i = \frac{1}{\sigma_i} \dots \dots \dots (3-1)$$

Kemudian dilakukan pencocokan dengan hukum ekstingsi untuk aerosol (2-1) sehingga diperoleh (model) profil ekstingsi menengah aerosol untuk tahun 1989 dan besarnya radius bulir. Pada pencocokan ini, diperoleh kesimpulan bahwa konstanta 2.5 pada pemodelan (2-1) tidak terlalu sesuai dengan perolehan data. Oleh karena itu pencocokan data yang dilakukan menggunakan penyesuaian (*fitting*) terhadap nilai radius bulir dan nilai konstanta  $k$  dari persamaan berikut.

$$k_D(\lambda) = k l g e^{-\lambda^a} \dots \dots \dots (3-2)$$

Kurva dekomposisi ekstingsi untuk tahun 1989 dalam Gambar 3-1 dinyatakan dengan notasi *diamond* untuk tiga panjang gelombang yang berbeda. Selanjutnya dibuat persamaan garis yang mendekati nilai ketiga data tersebut (melalui *fitting*) diperoleh garis yang pada gambar tersebut dinamakan 'Aerosol'. Pada Gambar 3-1, juga diberikan gambar kurva ekstingsi Rayleigh dan Ozon.

Decomposition of Extinction Curve 1989



Gambar 3-1: Kurva dekomposisi ekstingsi untuk tahun 1989

### 3.2 Metode Perhitungan

Untuk metode perhitungan koefisien ekstingsi ini dilakukan untuk panjang gelombang yang lebih umum, yaitu 0.5 - 3.0 nm.

#### 3.2.1 Metode I

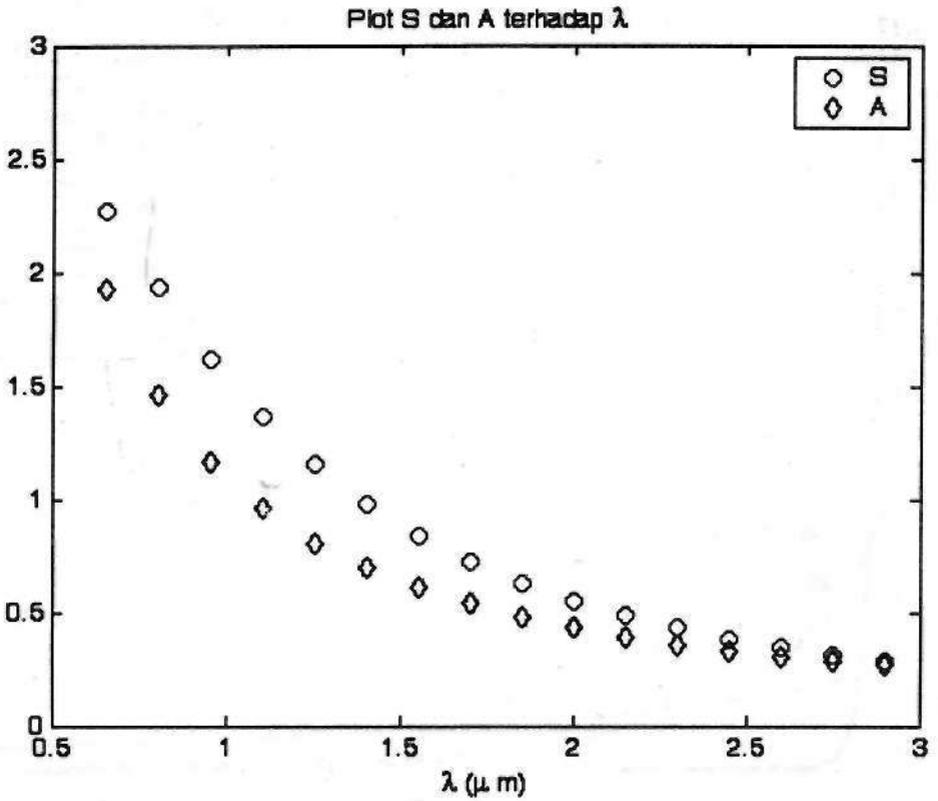
Hasil perhitungan untuk Metode I ini adalah kurva ekstingsi dengan formulasi sebagai berikut:

$$k_D(\lambda) = 0.15 \lg e^{\lambda^{-1.33}} \dots\dots\dots (3-3)$$

Persamaan ini diperoleh dari formulasi yang telah dijelaskan dalam dekomposisi data. Sehingga didapat nilai  $k = 0.15$ .

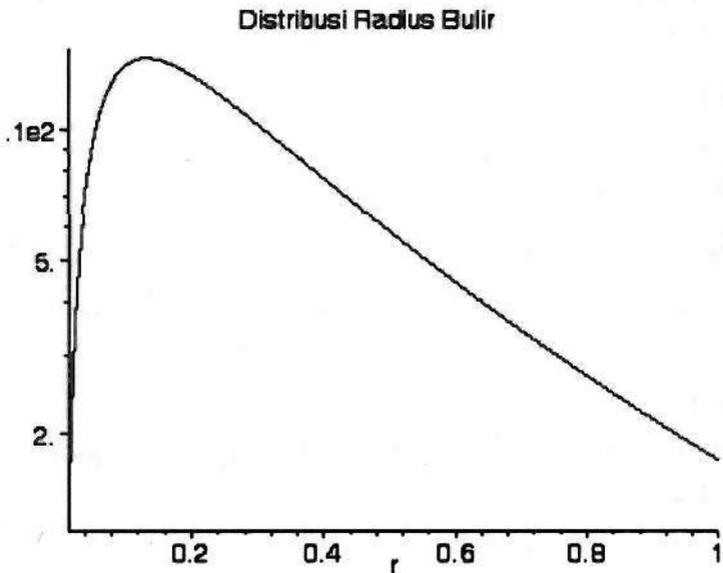
#### 3.2.2 Metode II

Hasil perhitungan S dan A untuk radius bulir 0.3 urn diperoleh dari *best fit* yang dapat dilihat dari grafik berikut:



Gambar 3-2: Nilai S dan A untuk Metode II dengan radius bulir 0.3  $\mu\text{m}$

Dari perhitungan nilai S dan A di atas diperoleh hasil integrasi  $\int_0^{\infty} N_a da$ , yaitu 1.1135 dengan grafik distribusi log-normal pada Gambar 3-3.



Gambar 3-3: Grafik distribusi log normal untuk Metode II

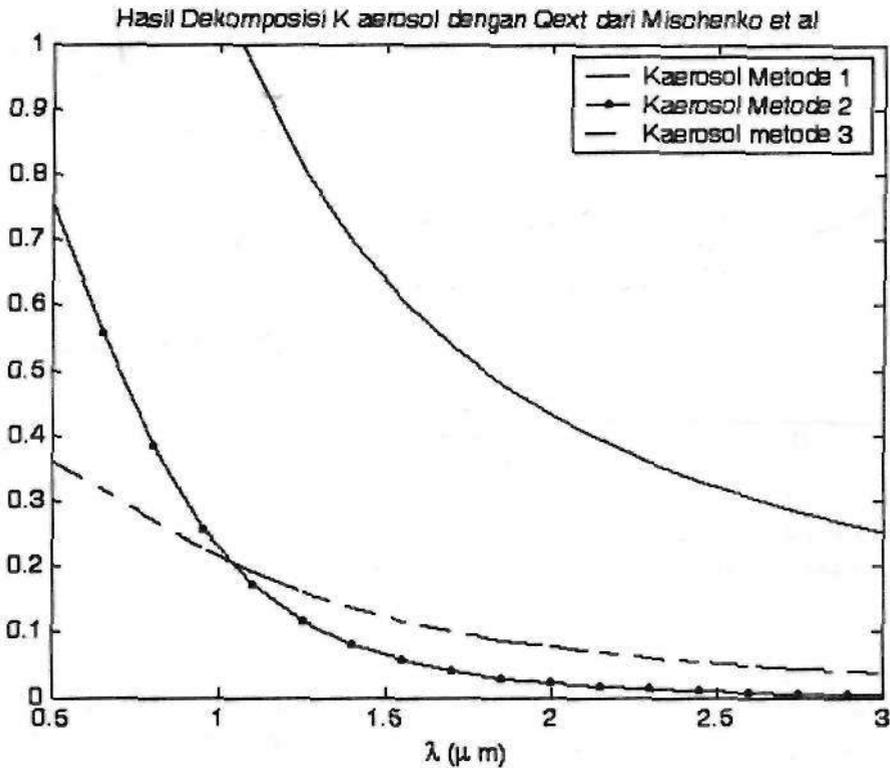
Perhitungan nilai terbaik radius bulir diperoleh dengan formulasi

$$\int_0^r N(a) da = 0.9. \text{ Angka } 0.9 \text{ diperoleh dari ketidakpastian nilai radius bulir } 10\%.$$

Hasil radius bulir yang dicapai dari perhitungan ini adalah  $0.462 \pm 0.05 \mu\text{m}$ .

### 3.2.3 Metode III

Dari penggunaan Metode III dalam pencarian radius bulir ini, didapatkan nilai integral pada formulasi di bagian 2-3 dengan hasil seperti pada grafik dalam Gambar 3-4.

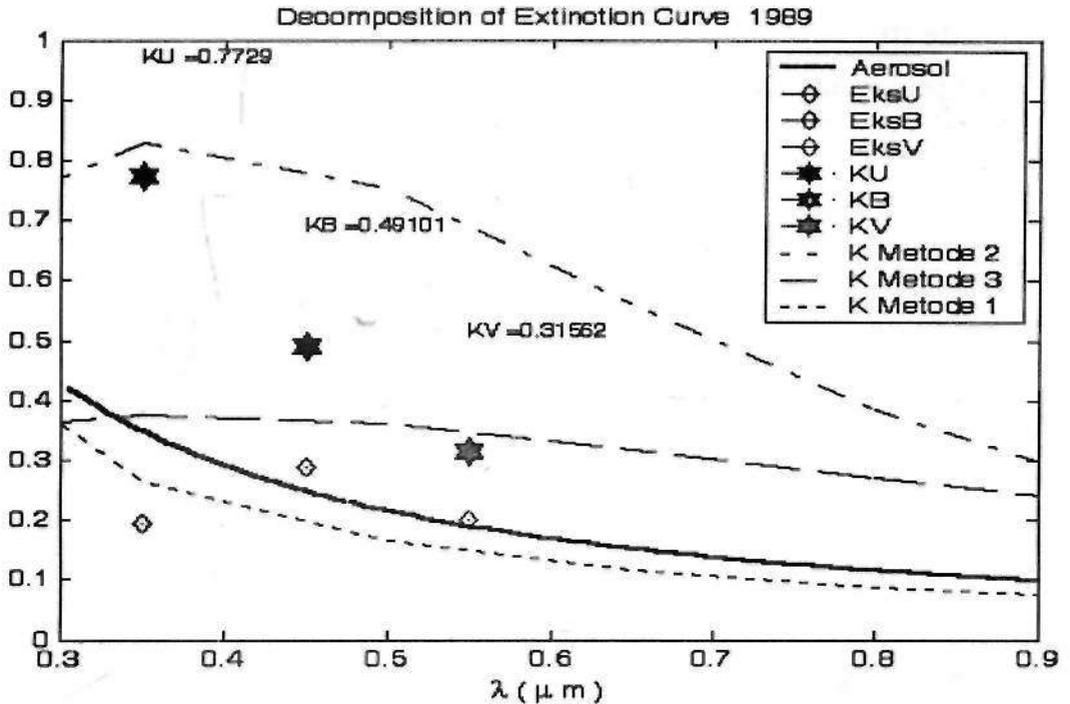


Gambar 3-4: Grafik perbandingan tiga metode perhitungan  $K$  aerosol

Dari Gambar 3-4, diperoleh kurva hasil perbandingan ketiga metode perhitungan koefisien ekstingsi yang diturunkan lewat formulasi Mie. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa ketiga metode memberikan hasil *trend* yang serupa dengan data pengamatan, yaitu monoton turun secara eksponensial. Perbedaan lain yang cukup signifikan diperoleh antara Metode I dan dua metode lainnya. Hal ini disebabkan Metode I lebih menggunakan pencocokan data untuk mendapatkan nilai konstanta  $k$ , yang akan berpengaruh terhadap perhitungan koefisien ekstingsi. Sedangkan Metode II dan Metode III memberikan hasil yang lebih seragam, karena kedua metode ini menggunakan parameter  $Q_{em}$  (efisiensi ekstingsi) yang tersedia di Tabel 2-1, untuk selanjutnya diolah dalam perhitungan pencarian koefisien ekstingsi.

### 3.3 Radius bulir untuk data pengamatan 1989

Hasil analisis data pengamatan tahun 1989, dicocokkan dengan perhitungan elaborasi Teori Mie untuk tiga metode diperlihatkan melalui grafik seperti pada Gambar 3-5.



Gambar 3-5: Hasil perbandingan koefisien ekstingsi lewat pengamatan dan perhitungan untuk kasus data tahun 1989

Dapat dilihat bahwa pada Gambar 3-5, hasil perhitungan terbaik koefisien ekstingsi untuk kasus data 1989 adalah dengan menggunakan metode pertama dan metode ketiga. Hal ini dapat kita amati dari data koefisien ekstingsi hasil pengamatan yang dinotasikan dengan *diamond*, karena kurva dekomposisi sendiri diturunkan dengan cara *fitting*, yang tentu saja memiliki rentang kesalahan perhitungan. Oleh sebab itu metode pertama maupun ketiga dapat dikatakan mendekati hasil pengamatan dengan radius bulir sebesar  $0.300 \pm 0.012$  urn.

## 4 KESIMPULAN

Dari penurunan ketiga metode perhitungan koefisien ekstingsi diperoleh hasil yang variatif, walaupun tidak terlalu signifikan. Hal ini juga disebabkan oleh perhitungan efisiensi ekstingsi. Sehingga dalam penerapan ketiga metode tersebut perlu diperhatikan pemilihan perhitungan efisiensi ekstingsinya.

Untuk kasus data observasi tahun 1989, diperoleh hasil bahwa radius bulir pada saat tersebut adalah sebesar  $0.300 \pm 0.012$  nm melalui perhitungan Metode I dan Metode III. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Metode I dan Metode III merupakan pilihan analisis bulir dari fotometri astronomi.

Studi ini merupakan bagian dan pemodelan dalam penelitian 'Pemantauan Kondisi Meteorologi Melalui Model Dinamik *Atmospheric Extinction*: Berdaarkan Basis Data Jangka Panjang Pengamatan Fotometri di Observatorium Bosscha, Lembang ITB" yang didanai oleh RUT DC 2002-2003 No. kontrak 14/SK/RUT. Kami mengucapkan terima kasih kepada Kementerian Riset & Teknologi dan LIPI Republik Indonesia, juga kepada Lembaga Penelitian & Pemberdayaan Masyarakat (LPPM) ITB dan Kelompok Penelitian dan Pengembangan Matematika Industri dan Terapan (KPP MIT), ITB atas dukungan substansialnya. Kami sangat menghargai *teamworking* kompak yang ditunjukkan rekan-rekan kelompok RUT IX yakni Marwan, M.Si, Plato M. Siregar, M.Si. dan Gabriel I. Prasetyono, S.Si.

Penelitian ini tidak akan bejalan sebagaimana mestinya tanpa dukungan teknis dari Observatorium Bosscha dan Departemen Astronomi. Untuk itu kami ucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya.

## DAFTAR RUJUKAN

- Angstrom, A., 1929.1. Geogr. Annaler, 11, 156
- Barber, P.W. & Hill, S.C., 1992. *Light Scattering by Small Particles: Computational Methods*, World Scientific, Singapore
- Bessel, M.S., 1992. PASP, 102, 1181
- Butcher, S.S. & Charlson, R.K., 1972. *An Introduction to Air Chemistry*, Academic Press, New York.
- Debye, P., 1909. Ann. Physik, 30, 59.
- Farlow, N.H., Oberbeck, V.R., Snetsinger, K.G., Ferry, G.V., Polkowski, G. & Hayes, D.M., 1981. Science, 211, 832.
- Van den Hulst, H.C., 1981. *Light Scattering by Small Particles*, Dover, New York.
- Malasan, H.L. & Raharto, M., 1993. in Proc. 5<sup>th</sup> International Symposium on Equatorial Atmospheric Observation over Indonesia, BPPT, Jakarta.
- Mishchenko, M.I., Dlugach, J.M., Yanovitskij, E.G. & Zakharova, N.T., 1999. J.QuantSpect. & Radiative Transf., 63, 409.
- Mie, G. 1908, Ann. Physik, 25, 377.
- Siedentopf, H., 1948. Naturwiss, 35, 289.
- Rienmann, H.-G., Osenkopf, V. & Beyersdorfer, S., 1992. A&A, 265, 360.
- Wempe, J., 1947. Astron. Nachr., 275, 1.