

METODA COROTATIONAL BEAM 2D UNTUK ANALISIS STATIK STRUKTUR NONLINIER GEOMETRIK (A 2D COROTATIONAL BEAM METHOD FOR GEOMETRICALLY NONLINEAR STATIC STRUCTURAL ANALYSIS)

Novi Andria¹, Lavi R. Zuhail², Leonardo Gunawan³, Hari Muhammad⁴

^{1,2,3,4}Program Studi Teknik Dirgantara, Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara

Institut Teknologi Bandung

Jl.Ganesha 10 Bandung 40132 Jawa Barat

¹e-mail: novi.andria@students.itb.ac.id

Diterima: 01 Maret 2019; Direvisi: 22 April 2019; Disetujui: 30 April 2019

ABSTRACT

This paper describes a 2D corotational beam method (CBM 2D) developed for analyzing geometrically nonlinear beam structure. By combining the corotational beam formula with Euler-Bernoulli beam Theory (EBT), the programming of this method becomes simple and practical with low computational cost. The accuracy and efficiency of the proposed method are verified by simulating some test models found in the literature. This method is also capable of analyzing nonlinear extensible beam and beam under follower loads, with such excellent accuracy. This study verifies the validity, efficiency, and practicality of the developed method.

Keywords: *corotational beam, CBM 2D, geometrically nonlinear, static structural analysis*

ABSTRAK

Makalah ini membahas sebuah metoda *corotational beam* dua dimensi (CBM 2D) yang dapat digunakan untuk analisis statik struktur yang nonlinier secara geometri. Dengan mengkombinasikan formulasi *corotational beam* dan *Euler-Bernoulli beam Theory* (EBT), implementasi numerik metoda ini menjadi sangat sederhana dengan beban komputasi yang rendah sehingga sangat praktis untuk diaplikasikan. Akurasi dan efisiensi metoda ini terverifikasi melalui beberapa uji numerik yang dilakukan pada beberapa model uji yang terdapat pada literatur. Metoda ini pun mampu memberikan hasil yang akurat untuk kasus *extensible beam* dan struktur beam yang dibebani *follower load*. Hasil penelitian ini memverifikasi validitas, efisiensi, dan kepraktisan dari metoda yang dikembangkan.

Kata kunci: *corotational beam, CBM 2D, nonlinear geometrik, analisis statik struktur*

1 PENDAHULUAN

Terdapat banyak struktur seperti struktur pesawat, propeler turbin angin, dan bangunan lepas pantai, yang dapat dimodelkan sebagai *beam* fleksibel. Struktur-struktur ini sering kali mengalami defleksi yang besar, tetapi regangannya kecil. Analisis struktur linier tidak dapat mensimulasikan kasus ini karena defleksi yang besar menimbulkan nonlinieritas yang dikenal dengan nonlinieritas geometrik. Kasus ini banyak dianalisis menggunakan *Nonlinear Finite Element Method* (NFEM) yang pada umumnya berdasarkan pada *Total Lagrangian Formulation* (TLF) (Nanakorn dan Vu, 2006).

Pada TLF, translasi dan rotasi nodal menjadi saling terkait satu sama lain saat struktur berdefleksi cukup besar. Hal ini menyebabkan hubungan nonlinier antara translasi dan rotasi global menjadi sulit diformulasikan yang mengakibatkan kompleksnya penentuan energi regangan. Penerapan interpolasi linier dalam formulasinya membuat hasil perhitungannya menjadi tidak akurat. Ketidakakuratan ini erat kaitannya dengan *field-inconsistency interpolation* (Nanakorn dan Vu, 2006).

Selain TLF, terdapat dua deskripsi kinematis yang umum digunakan, yakni *Updated Lagrangian Formulation* (ULF) dan *Corotational Formulation* (CF). Bila ULF digunakan dalam analisis nonlinear geometrik, permasalahan inkonsistensi interpolasi dapat dihindari selama perpindahan antar konfigurasinya kecil. Hal ini mengakibatkan diperlukannya *time step* yang kecil (Nanakorn dan Vu, 2006) agar hasil perhitungannya akurat sehingga beban komputasinya menjadi tinggi. Pendekatan CF dapat mengatasi permasalahan *field-inconsistency* ini ketika diaplikasikan pada kasus struktur berdefleksi besar dengan regangan kecil. Hal ini terjadi karena

pada pendekatan ini perpindahan nodalnya dibagi menjadi perpindahan gerak kaku yang besar (*large rigid displacements*) dan deformasi yang kecil (Le, 2013; Le dkk., 2011; 2012; Levyakov, 2015; Nanakorn dan Vu, 2006). Deformasi ini yang diukur pada kajian lokal.

Beberapa peneliti menerapkan metoda CF ini untuk mengembangkan metoda numerik yang efisien untuk analisis struktur nonlinier. Le (2013), dan Le dkk. (2011; 2012) adalah yang paling fokus pada pengembangan metoda ini pada aplikasi dinamika nonlinier struktur *beam*. Mereka menggunakan *Interdependent Interpolation Element* (IIE) dan teori *shallow arch beam* pada formulasi kinematika elemen lokalnya.

Untuk analisis statik, tidak ada keharusan untuk menentukan jenis *shape function* yang tepat dalam memformulasikan kinematika elemen lokal. Hal inilah yang dikaji pada penelitian ini. Makalah ini membahas metoda *corotational* pada struktur *beam* dua dimensi yang diberi nama CBM 2D. Struktur fleksibel dimodelkan tanpa adanya interpolasi khusus sehingga deformasi lokal dapat dimodelkan melalui pemodelan *beam* linier yang sederhana. Pendekatan ini mendekati CF 2D dari Yaw (2009) dengan penerapan *Euler-Bernoulli beam Theory* (EBT).

Pada penelitian ini CBM 2D diaplikasikan pada kasus yang lebih luas mencakup *extensible beam* dan *beam* dengan beban *follower loads*, yang sejauh pengetahuan penulis belum pernah dianalisis menggunakan pendekatan CF. Keterbaruan dari metoda yang dikembangkan ini adalah kemampuan dalam menganalisis struktur nonlinier geometrik secara akurat dan efisien dengan cakupan aplikasi yang lebih luas.

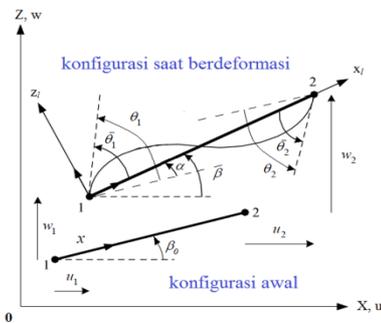
2 METODOLOGI

2.1 Konsep Corotational

Prinsip utama dari pendekatan *corotational* adalah membagi gerak elemen menjadi bagian gerak kaku dan bagian yang berdeformasi. Saat elemen bergerak kaku, koordinat sistem lokal bergerak dan berputar mengikuti pergerakan elemen. Pada kasus dua dimensi (2D), sumbu x selalu searah dengan sumbu longitudinal elemen, sedangkan sumbu y atau z tegak lurus terhadap sumbu x (Yaw, 2009). Koordinat lokal inilah yang menjadi acuan dalam menghitung deformasi elemen (Le, 2013; Yaw, 2009). Hal ini memungkinkan penerapan hubungan regangan-perpindahan linier (*linear strain-displacement*) pada acuan lokal (Levyakov, 2015).

2.2 Kinematika Elemen Beam

Kinematika *corotational* sebuah elemen beam lurus dengan dua nodal ditampilkan pada Gambar 2.



Gambar 2: Kinematika elemen beam. Dimodifikasi dari (Le dkk., 2011).

Koordinat global (X,Y) untuk nodal 1 dan 2 adalah (x_1, z_1) dan (x_2, z_2) . Vektor perpindahan global elemennya adalah:

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2]^T \quad (2.1)$$

Sedangkan vektor perpindahannya ditulis:

$$\bar{\mathbf{q}} = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2]^T \quad (2.2)$$

dimana

$$\bar{u} = (l_n^2 - l_0^2)/(l_n + l_0) \quad (2.3)$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha = \theta_1 - \beta - \beta_0 \quad (2.4)$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha = \theta_2 - \beta - \beta_0 \quad (2.5)$$

Pers. (2.4) dan (2.5) diperoleh dengan menerapkan *Euler-Bernoulli beam Theory* (EBT) atau *Kirchhoff Theory* yang mengasumsikan tidak terjadinya deformasi geser sehingga *cross-section beam* selalu normal terhadap garis tengah elemen. Pada pers. (2.3), l_0 dan l_n adalah panjang awal dan panjang elemen setelah berdeformasi, yang ditulis:

$$l_n = [(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (2.6)$$

$$l_0 = [(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)^2]^{1/2} \quad (2.7)$$

β adalah sudut lokal terhadap koordinat global saat elemen berdeformasi, dimana

$$c = \cos \beta = (x_2 + u_2 - x_1 - u_1)/l_n \quad (2.8)$$

$$s = \sin \beta = (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)/l_n \quad (2.9)$$

sehingga

$$\beta = \text{atan}(s/c) \quad (2.10)$$

Relasi antara variasi perpindahan lokal dengan global adalah:

$$\delta \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q} \quad (2.11)$$

dimana

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 1 & s/l_n & -c/l_n & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 0 & s/l_n & -c/l_n & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.2 Matriks Kekakuan dan Vektor Beban Internal Elemen

Matriks kekakuan global elemen (\mathbf{K}) dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{1}{l_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T N + \frac{1}{l_n^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) (M_1 + M_2) \quad (2.13)$$

dengan

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \quad (2.14)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (2.15)$$

Pada pers. (2.13) N merupakan gaya axial internal lokal, sedangkan M_1 dan M_2 adalah momen internal lokal pada nodal 1 dan 2.

Karena tidak diterapkannya interpolasi *shape function* secara khusus pada formulasi lokal, matriks kekakuan lokal elemen (\mathbf{K}_l) dijabarkan menggunakan analisa struktur linier standar sebagai berikut:

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} EA/l_0 & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/l_0 & 2EI/l_0 \\ 0 & 2EI/l_0 & 4EI/l_0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Hubungan antara variasi vektor beban internal lokal ($\delta\bar{\mathbf{p}}$) dan variasi perpindahan lokal elemen ($\delta\bar{\mathbf{q}}$) adalah:

$$\delta\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta M_1 \\ \delta M_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_l \delta\bar{\mathbf{q}} \quad (2.17)$$

Dengan menggunakan pers. (2.12) dan pers. (2.17), diperoleh vektor beban internal (elastik) global sebagai berikut:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{p}} \quad (2.18)$$

Pada implementasi numeriknya, vektor \mathbf{p} ini perlu ditransformasikan menjadi

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{A}_{i=1}^{n_m} \mathbf{p} \quad (2.19)$$

dimana $\mathbf{A}_{i=1}^{n_m}$ = *Assembly operator*.

Adapun detail mengenai penurunan dan uraian matriks kekakuan elamen dan vektor beban internal ini dapat ditemukan pada Yaw (2009), Le dkk. (2011), dan Le (2013).

2.3 Algoritma CBM 2D

Implementasi numerik formulasi *corotational beam* 2D ini dilakukan menggunakan algoritma sebagai berikut:

1. Input geometri dan properti material: panjang (L), lebar (b), ketebalan (h), dan modulus young (E);
2. Hitung luas *cross-section* (A) dan momen inersia area (I);
3. Input variabel tiap elemen beam saat konfigurasi awal: β_0 , l_0 , \mathbf{q} , $\bar{\mathbf{p}}$, \mathbf{x} , dan \mathbf{z} . Pada saat kondisi awal, $\mathbf{q} = 0$ dan $\bar{\mathbf{p}} = 0$. \mathbf{x} dan \mathbf{y} adalah vektor koordinat global sumbu x dan z pada setiap nodal;
4. Tetapkan vektor beban eksternal \mathbf{F} ;
5. Tetapkan *load factor* (λ), jumlah kenaikan beban (n_{inc}), dan toleransi error (tol). $\lambda = 1/n_{inc}$, $tol = 10^{-5}$.
6. Mulai *looping* menggunakan metoda Newton-Raphson untuk setiap kenaikan beban ($n = 0$ hingga $n = n_{inc}-1$) dan pada setiap tahap dilakukan iterasi hingga $R \leq tol$, dimana

$$R = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{int} \quad (2.21)$$

\mathbf{F}_{int} dapat dilihat pada pers. (2.19)

Adapun uraian lebih lengkap mengenai algoritma formula *corotational beam* ini dapat dilihat pada Yaw (2009).

3 HASIL PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai aplikasi numerik CBM yang dikembangkan pada beberapa contoh kasus stuktur nonlinier geometrik yang populer digunakan sebagai model uji (*benchmarking test models*). Hasil yang diperoleh dari penelitian ini dibandingkan dengan hasil eksperimen, analitik, maupun numerik yang tersedia pada literatur.

3.1 Analisis Konvergensi dan Akurasi

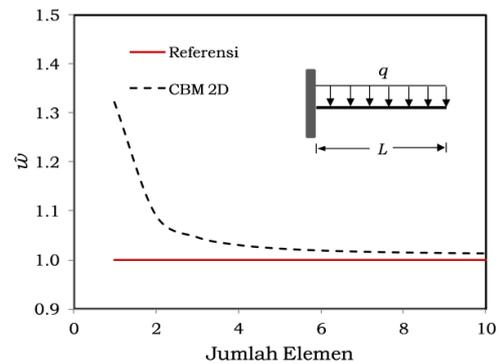
Sebelum dilakukan simulasi pada beberapa model uji populer, uji konvergensi perlu dilakukan terlebih dahulu. Pada uji konvergensi ini, model cantilever beam diberi beban gaya terdistribusi (Gambar 3-1). Struktur beam memiliki $L = 0.4$ m, $b = 0.025$ m, ketebalan $h = 0.0004$ m, $E = 194.3$ GPa, dan gaya terdistribusi (q) = 0.758 N/m. Beléndez dkk. (2003) melaporkan hasil eksperimen defleksi vertikal ujung beam (w) sebesar 0.089 m.

Pada Gambar 3-1 ditampilkan hasil analisis konvergensi metoda CBM 2D dengan defleksi vertikal ujung beam yang telah dinormalisasi terhadap hasil eksperimen ($\hat{w} = w_{\text{simulasi}}/w_{\text{eksperimen}}$). Dapat dilihat bahwa hasil simulasi menggunakan CBM 2D konvergen secara cepat terhadap nilai referensi seiring dengan bertambahnya jumlah elemen beam.

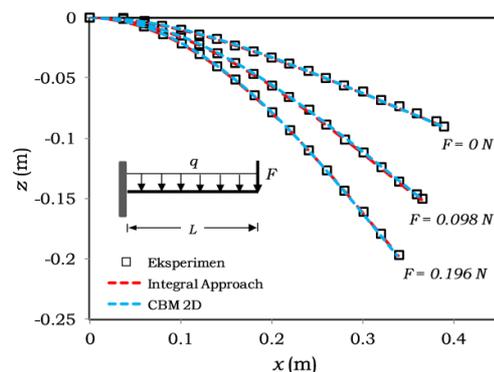
Untuk mengetahui tingkat akurasi dari metoda ini, model yang sama disimulasikan ulang dengan menambah beban berupa gaya terkonsentrasi (F) pada ujung beam (lihat Gambar 3-2). Gaya pada ujung beam ini divariasikan sebesar 0 N, 0.098 N, dan 0.196 N. Struktur beam hanya dimodelkan menggunakan 10 elemen untuk menunjukkan efisiensi metoda CBM 2D ini.

Pada Gambar 3-2 ditampilkan hasil simulasi berupa defleksi struktur beam dan perbandingannya terhadap hasil eksperimen (Beléndez dkk., 2003) dan hasil numerik menggunakan *integral approach* (Chen, 2010). Pada Gambar tersebut dapat dilihat bahwa hasil simulasi dapat mendekati nilai referensi baik eksperimen maupun numerik. Relatif error maksimum defleksi vertikal ujung beam antara hasil simulasi dengan hasil eksperimen dan hasil numerik berturut-turut adalah

sebesar 0.44% dan 0.06%. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa konvergensi dan keakurasian metoda ini telah terverifikasi. Selain itu, penerapan jumlah elemen yang minimum menunjukkan bahwa metoda CBM 2D ini memiliki beban komputasi yang rendah.



Gambar 3-1: Analisis konvergensi defleksi \hat{w} terhadap jumlah elemen beam



Gambar 3-2: Hasil simulasi CBM 2D dan perbandingannya terhadap hasil eksperimen (Beléndez, 2003) dan numerik (Chen, 2010)

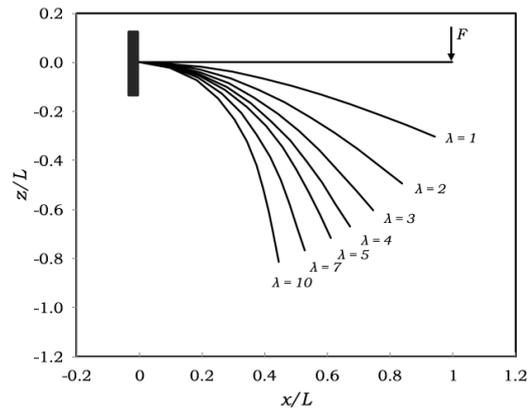
3.2 Cantilever Beam dengan beban terkonsentrasi di ujung beam

Model uji pada Bagian 3.1 belum cukup mendemonstrasikan kemampuan metoda CBM 2D ini dalam menganalisis struktur *beam* dengan defleksi yang sangat besar. Oleh karena itu, pada bagian ini model yang sama dianalisis kembali dengan memberikan beban yang lebih besar. Model *cantilever* hanya diberi beban pada ujungnya dengan $F =$

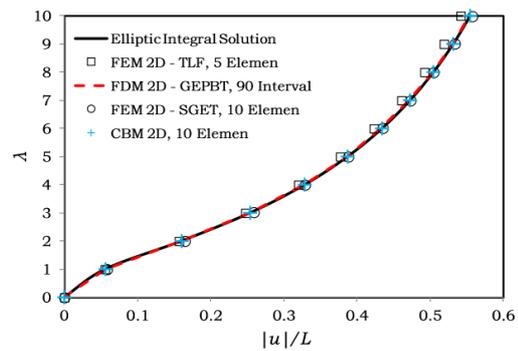
$\lambda.EI/L^2$, dimana λ adalah *load factor*. Model ini telah digunakan oleh beberapa peneliti untuk mengkaji nonlinearitas elemen beam.

Jumlah elemen yang diterapkan pada simulasi ini adalah 10 elemen. Hasil simulasi dibandingkan dengan solusi *elliptic integral* dan hasil simulasi *Finite Element Method* berbasis TLF (FEM-TLF) yang disediakan oleh Nanakorn dan Vu (2006), *Finite Difference Method* menggunakan *Geometrically Exact Plane Beam Theory* (FDM-GEPBT) yang dikembangkan oleh Babilio dan Lenci (2017), dan FEM berbasis *Strain-Gradient Elasticity Theory* (SGET) yang dilaporkan oleh Beheshti (2016). Seluruh metoda numerik pada referensi-referensi tersebut merupakan metoda untuk kasus 2D dan menggunakan solusi *elliptic integral* sebagai acuan utama perbandingannya.

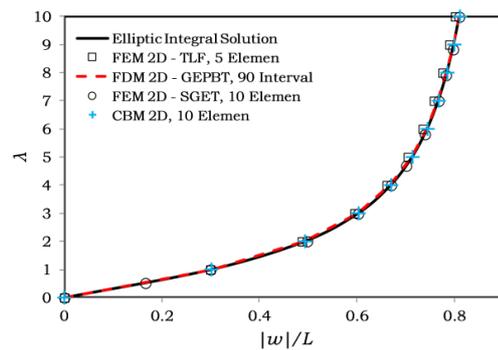
Pada Gambar 3-3 ditunjukkan deformasi *beam* hasil simulasi seiring dengan meningkatnya besar gaya. Pada Gambar 3-4(a) dan 3-4(b) ditampilkan hasil simulasi berupa perpindahan horizontal (u) dan vertikal (w) *nondimensional* ujung beam. Pada kedua gambar tersebut ditampilkan pula perbandingan antara hasil simulasi dan referensi. Dapat dilihat bahwa hasil simulasi menggunakan CBM 2D dan hasil numerik FDM 2D - GEPBT (Babilio dan Lenci, 2017) paling mendekati solusi *elliptic integral*. Kendati kedua metoda memiliki keakurasian yang hampir sama, metoda CBM 2D jelas lebih efisien karena untuk memperoleh hasil yang cukup akurat tersebut hanya diperlukan 10 elemen. Jumlah ini jauh lebih sedikit dibandingkan metoda FDM 2D - GEPBT yang menggunakan 90 interval (ekivalen dengan 90 elemen).



Gambar 3-3: Deformasi non-dimensional struktur cantilever beam dengan jumlah elemen 10 untuk kasus beban gaya di ujung beam



(a)



(b)

Gambar 3-4:(a) $|u|/L$ vs. λ ; (b) $|w|/L$ vs. λ untuk model cantilever dengan beban gaya di ujung beam

3.3 Cantilever beam dengan beban momen di ujung beam

Cantilever beam diberi beban terkonsentrasi berupa momen pada ujungnya. Model uji ini sangat populer dikalangan peneliti struktur nonlinear karena terdapat solusi analitiknya. Adapun solusi analitik untuk menghitung deformasi beam dapat dilihat pada makalah Jeon dkk. (2015), Levyakov (2015), Ko dkk. (2017), dan Zhou dkk. (2018). Menurut perhitungan secara analitik, *cantilever beam* yang lurus akan berdeformasi membentuk satu lingkaran penuh bila diberi beban moment pada ujung *beam* sebesar $M_0 = 2\pi.EI/L$. Hal ini membuat model uji ini menjadi pilihan yang tepat untuk menguji kemampuan metoda CBM 2D dalam menganalisis deformasi yang sangat besar.

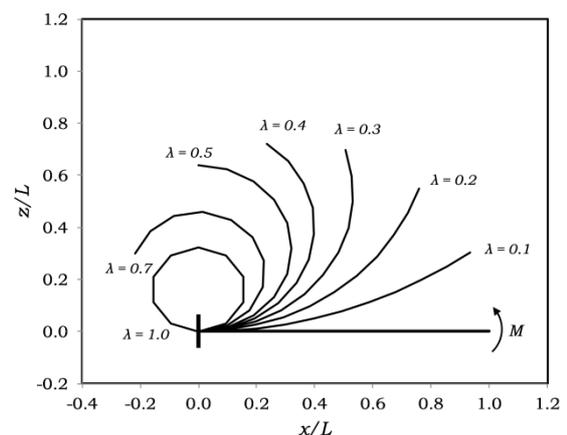
Mengacu pada Levyakov (2015), struktur beam dimodelkan dengan $L = 1$ m, $b = 0.01$ m, $h = 0.002$ m, dan $E = 200$ GPa. Beban momen pada ujung beam adalah $M = \lambda.M_0$. Pada simulasi ini beam dimodelkan dengan menggunakan 10 elemen dan *load factor* (λ) dibuat bervariasi dimulai dari 0.1 hingga 1. Hasil simulasi dibandingkan dengan solusi analitik dan numerik yang tersedia pada literatur. Hasil perhitungan numerik yang dijadikan pembanding adalah hasil simulasi *NFEM* 3D berbasis *Kinematic-Group Approach* (NFEM 3D-KGA) yang disediakan oleh Levyakov (2015), dan FEM menggunakan model elemen shell MITC4+ (FEM Shell – MITC4+) yang dikembangkan oleh Ko dkk. (2017). Kedua referensi tersebut dipilih untuk menunjukkan bahwa metoda CBM 2D yang dikembangkan ini dapat diaplikasikan untuk model pelat selama deformasinya hanya terjadi pada satu bidang (2D).

Pada Gambar 3-5 ditunjukkan deformasi beam hasil simulasi seiring

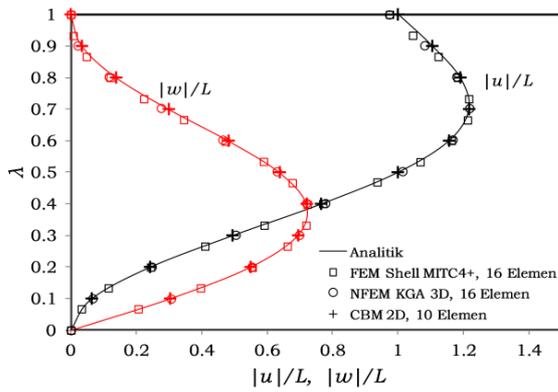
dengan meningkatnya besar momen. Pada Gambar 3-6 ditampilkan perbandingan antara hasil simulasi dan solusi analitik dan numerik berupa defleksi horizontal dan vertikal *nondimensional* ujung beam.

Pada Gambar 3-5 dapat dilihat bahwa kedua ujung struktur beam saling bertemu setelah diberi pembebanan dengan *load factor* 1. Hal ini menunjukkan bahwa metoda CBM 2D mampu mensimulasikan struktur dengan deformasi yang sangat besar dan sesuai dengan solusi analitik.

Pada Gambar 3-6 dapat dilihat bahwa hasil simulasi menggunakan metoda CBM 2D ini paling mendekati solusi analitik dibandingkan referensi numerik dari Levyakov (2015) dan Ko dkk. (2017). Hal ini terlihat cukup jelas terutama untuk nilai defleksi horizontal ujung beam ($|u|/L$) untuk $\lambda > 0.7$. Meskipun jumlah elemen yang digunakan dalam simulasi lebih sedikit dari kedua referensi tersebut, metoda CBM 2D ini terbukti lebih akurat. Hal ini membuktikan kembali bahwa metoda ini efisien dan akurat untuk menganalisis struktur beam dengan nonlinear geometrik.



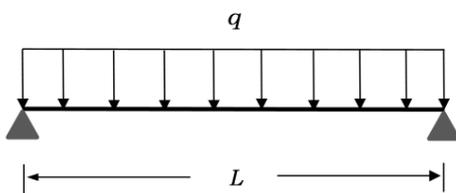
Gambar 3-5: Deformasi non-dimensional struktur cantilever beam dengan jumlah elemen 10 untuk kasus beban momen di ujung beam



Gambar 3-6: $|u|/L$ vs. λ dan $|w|/L$ vs. λ untuk model cantilever dengan beban momen di ujung beam

3.4 Pinned-pinned beam dengan beban gaya terdistribusi

Pada simulasi ini model *beam* diberi *constraint* engsel (*pinned*) pada kedua ujungnya seperti ditunjukkan pada Gambar 3-7. Model uji ini dipilih karena sejauh pengetahuan penulis belum ditemukan adanya referensi yang mengaplikasikan metoda CBM untuk kasus ini. Sementara pada bidang pengembangan *nonlinear* FEM, model ini sering dijadikan model uji. Ranjan (2011) dan Arbind (2017) menggunakan model ini untuk menguji metoda numerik berdasarkan FEM yang mereka kembangkan. Kasus ini menarik untuk dikaji karena formula yang tepat untuk kasus ini adalah formula *extensible beam* yang memungkinkan terjadinya regangan axial yang cukup besar.



Gambar 3-7: Model pinned-pinned beam dengan beban gaya terdistribusi

Mengikuti pemodelan yang dilakukan oleh Ranjan (2011), struktur beam dimodelkan dengan $L = 2.54$ m, $b = 0.0254$ m, $h = 0.0254$ m, dan $E = 206.754$ GPa. Beban gaya terdistribusi yang diterapkan adalah $q = \lambda \cdot q_0$ dengan $q_0 = 6.89$ kN/m². Load factor (λ) dibuat bervariasi dimulai dari 1 hingga 10.

Pada penelitian ini, jumlah beam divariasikan menjadi 10, 20, dan 30 elemen. Hasil simulasi dibandingkan hasil numerik menggunakan NFEM berdasarkan *hp-Spectral Approximation* (hpSA) dan *Reddy third order Shear Deformation Theory* (RSDT) yang datanya tersedia pada Ranjan (2011). Jumlah elemen yang digunakan pada referensi tersebut adalah 10 elemen.

Pada Tabel 3-1 ditunjukkan hasil simulasi dan perbandingannya terhadap nilai referensi berupa defleksi vertikal *nondimensional* pada titik tengah beam (w_c) seiring dengan meningkatnya besar beban terdistribusi. Dengan mengacu pada nilai NFEM-RDST sebagai acuan, dapat dilihat bahwa hasil simulasi CBM 2D menggunakan 10 elemen mendekati hasil numerik menggunakan NFEM-hpSA. Maksimum error pada model ini adalah sebesar 0.49%, lebih tinggi sedikit dari maksimum error simulasi NFEM-hpSA sebesar 0.48%. Hal ini mengindikasikan bahwa metoda CBM 2D yang berdasarkan EBT ini mampu mensimulasikan kasus beam dengan regangan axial yang cukup besar meskipun formula *extensible beam* tidak diterapkan. Penambahan jumlah elemen menjadi 20 atau 30 elemen jelas meningkatkan akurasi metoda CBM ini dengan maksimum error berturut-turut sebesar 0.13% dan 0.06%.

Tabel 3-1: Defleksi vertikal titik tengah beam ($|w_c|/L$) untuk kasus pinned-pinned beam

λ	$ w_c /L \times 100$				
	NFEM-RDST (Ranjan, 2011)	NFEM-hpSA (Ranjan, 2011)	CBM 2D		
			10 Elemen	20 Elemen	30 Elemen
1	0.3685	0.3697	0.3696	0.3688	0.3686
2	0.5454	0.5478	0.5476	0.5460	0.5457
3	0.6640	0.6675	0.6669	0.6647	0.6643
4	0.7555	0.7593	0.7590	0.7564	0.7559
5	0.8312	0.8353	0.8351	0.8322	0.8317
6	0.8964	0.9008	0.9007	0.8975	0.8969
7	0.9540	0.9586	0.9586	0.9552	0.9545
8	1.0058	1.0107	1.0107	1.0071	1.0064
9	1.0531	1.0582	1.0583	1.0545	1.0538
10	1.0967	1.1020	1.1022	1.0982	1.0974

3.5 Cantilever beam dengan follower load

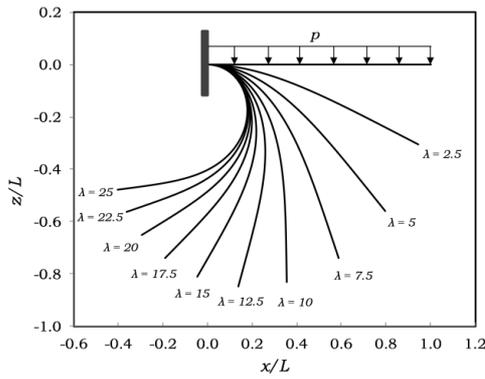
Pada bagian ini disimulasikan model *cantilever beam* dengan pembebanan nonkonservatif berupa *follower load*. Beban jenis ini bergantung pada konfigurasi struktur beam saat berdeformasi (*current configuration*) sehingga perlu diperbaharui arah pembebanannya pada setiap tahap perhitungan. Salah satu contoh beban jenis ini adalah tekanan, yang arahnya selalu berlawanan dengan normal suatu permukaan.

Model uji ini dipilih karena belum ditemukan adanya referensi yang mengaplikasikan metoda CBM untuk kasus ini. Sangat sedikit pula referensi tentang metoda numerik nonlinear yang menggunakan model ini sebagai model uji karena jenis pembebanan yang *path-dependent* ini memerlukan interval tahap perhitungan yang kecil sehingga beban komputasinya menjadi tinggi. Kecilnya interval tersebut terjadi karena akurasi penerapan beban pada setiap tahap ditentukan oleh hasil perhitungan pada tahap sebelumnya. Kondoh dan Atluri (1987) telah mensimulasikan kasus ini menggunakan NFEM. Zupan dkk. (2012) menganalisis model ini

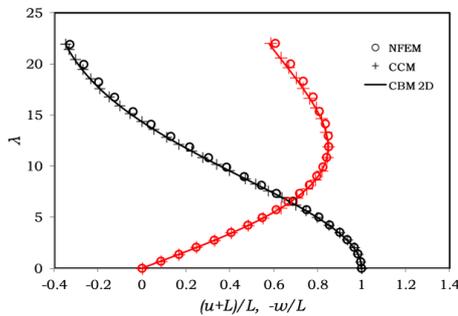
menggunakan *quaternion-based* FEM. Masjedi dan Ovesy (2015; 2015) menerapkan *Chebyshev Collocation Method* (CCM), sedangkan Amoozgar dan Shahverdi, (2016) menggunakan *generalized differential quadrature method* dalam menganalisis model ini.

Struktur beam dimodelkan dengan $L = 0.5$ m, $b = 0.01$ m, $h = 0.01$ m, dan $E = 150$ MPa. Beban tekanan yang diterapkan adalah $p = \lambda \cdot p_0$ dengan $p_0 = EI/L^3$. *Load factor* (λ) dibuat bervariasi dimulai dari 2.5 hingga 25. Jumlah elemen beam yang digunakan adalah 10 elemen.

Pada Gambar 3-8 ditampilkan deformasi struktur beam hasil simulasi seiring dengan meningkatnya besar tekanan yang diterapkan. Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa struktur beam berdeformasi cukup besar sebagai akibat dari penerapan beban berupa tekanan, yang selalu memberi efek bending pada struktur beam. Pada Gambar 3-9 ditampilkan defleksi *nondimensional* ujung beam dan perbandingannya terhadap hasil numerik menggunakan NFEM dari Kondoh dan Atluri (1987) dan CCM dari Masjedi dan Ovesy (2015).



Gambar 3-8: Deformasi non-dimensional struktur cantilever beam untuk kasus beban nonkonservatif berupa tekanan



Gambar 3-9: Posisi nondimensional ujung beam untuk kasus beban nonkonservatif berupa tekanan

Pada Gambar 3-9 dapat dilihat bahwa hasil NFEM dari Kondoh dan Atluri (1987) lebih identik dengan hasil simulasi CBM 2D ini dibandingkan dengan hasil simulasi menggunakan CCM dari Masjedi dan Ovesy (2015). Mengingat hasil NFEM dari Kondoh dan Atluri (1987) selalu dijadikan referensi untuk perhitungan numerik *nonlinier* pada model uji ini, maka dapat dikatakan bahwa metoda CBM 2D ini sangat akurat dalam mensimulasikan model *slender beam* dengan pembebanan berupa *follower load*, bahkan lebih akurat dibandingkan dengan metoda CCM yang dikembangkan oleh Masjedi dan Ovesy (2015).

4 KESIMPULAN

Kombinasi antara formulasi *corotational beam* dan *Euler Bernouli beam Theory* yang tidak menerapkan fungsi interpolasi secara khusus pada formulasi lokal elemennya membuat metoda CBM 2D ini dapat mengatasi permasalahan *field-inconsistency*, yang pada umumnya ditemui pada analisis struktur nonlinear yang menggunakan TLF. Hal ini pun membuat implementasi numerik dan pemrograman dari pendekatan ini menjadi sangat sederhana dan beban komputasinya rendah sehingga sangat praktis untuk digunakan.

Sejumlah uji numerik telah dilakukan pada model uji populer untuk mempelajari konvergensi, akurasi, dan keandalan metoda CBM 2D ini dalam menganalisis kasus struktur nonlinear geometrik. Selain itu, uji numerik pun dilakukan pada model yang belum pernah dianalisis menggunakan formulasi *corotational beam* yakni *extensible beam* dan cantilever beam dengan pembebanan nonkonservatif berupa *follower load*. Berdasarkan perbandingan antara hasil simulasi dan referensi yang terdapat pada literatur baik hasil eksperimen, solusi analitik, ataupun solusi numerik, dapat disimpulkan bahwa metoda ini mampu memberi hasil yang akurat meski hanya menggunakan jumlah elemen yang sedikit. Metoda ini pun mampu memberikan hasil yang akurat dan efisien untuk kasus *extensible beam*. Selain itu, metoda ini sangat mudah diterapkan untuk analisis struktur beam dengan pembebanan berupa *follower load* dengan hasil yang sangat akurat. Hasil penelitian ini membuktikan validitas, efisiensi, dan kepraktisan dari metoda CBM 2D yang dikembangkan ini.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Pengelola Dana Pendidikan (LPDP) Kementerian Keuangan RI atas dukungan pembiayaan secara penuh terhadap proses penelitian ini.

DAFTAR RUJUKAN

- Amoozgar, M. R., dan Shahverdi, H. (2016). *Analysis of nonlinear fully intrinsic equations of geometrically exact beams using generalized differential quadrature method*. Acta Mechanica, Vol. 227 No. 5, 1265-1277. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1528-7>
- Arbind, A., Reddy, J. N., dan Srinivasa, A. R. (2017). *Nonlinear analysis of beams with rotation gradient dependent potential energy for constrained micro-rotation*. European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 65, 178-194. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.04.002>
- Babilio, E., dan Lenci, S. (2017). *On the notion of curvature and its mechanical meaning in a geometrically exact plane beam theory*. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 128-129, 277-293. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.03.031>
- Beheshti, A. (2016). *Large deformation analysis of strain-gradient elastic beams*. Computers and Structures, Vol. 177, 162-175. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.07.013>
- Beléndez, T. , Neipp, C., dan Beléndez, A. (2003). *Numerical and Experimental Analysis of a Cantilever Beam: A Laboratory Project to Introduce Geometric Nonlinearity in Mechanics of Materials*. International Journal of Engineering Education, Vol. 19 No. 6, 885-892.
- Chen, L. (2010). *An integral approach for large deflection cantilever beams*. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 45 No. 3, 301-305. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004>
- Jeon, H.M., Lee, Y., Lee, P.S., dan Bathe, K.J. (2015). *The MITC3+ shell element in geometric nonlinear analysis*. Computers and Structures, Vol. 146, 91-104. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.09.004>
- Ko, Y., Lee, P. S., dan Bathe, K. J. (2017). *The MITC4+ shell element in geometric nonlinear analysis*. Computers and Structures, Vol. 185, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.01.015>
- Kondoh, K., dan Atluri, S. N. (1987). *Large-deformation, elasto-plastic analysis of frames under nonconservative loading, using explicitly derived tangent stiffnesses based on assumed stresses*. Computational Mechanics, Vol. 2 No.1, 1-25. <https://doi.org/10.1007/BF00282040>
- Le, T. N. (2013). *Nonlinear dynamics of flexible structures using corotational beam elements*. Ph.D Thesis, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00954739>
- Le, T. N., Battini, J. M., dan Hjiaj, M. (2011). *Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams*. Computational Mechanics, Vol. 48 No. 2, 153-161. <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>
- Le, T. N., Battini, J. M., dan Hjiaj, M. (2012). *Dynamics of 3D beam elements in a corotational context: A comparative study of established and new formulations*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 61, 97-111. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.06.007>
- Levyakov, S. V. (2015). *Formulation of a geometrically nonlinear 3D beam finite element based on kinematic-group approach*. Applied Mathematical

- Modelling, Vol. 39 No. 20, 6207-6222.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.064>
- Masjedi, P. K., dan Ovesy, H. R. (2015). *Chebyshev collocation method for static intrinsic equations of geometrically exact beams*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 54, 183-191.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.10.016>
- Masjedi, P. K., dan Ovesy, H. R. (2015). *Large deflection analysis of geometrically exact spatial beams under conservative and nonconservative loads using intrinsic equations*. Acta Mechanica, Vol. 226 No. 6, 1689-1706.
<https://doi.org/10.1007/s00707-014-1281-3>
- Nanakorn, P., dan Vu, L. N. (2006). *A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using the total Lagrangian formulation*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 42 No. 14-15, 1240-1247.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.06.002>
- Ranjan, R. (2011). *Nonlinear finite element analysis of bending of straight beams Using hp-spectral approximations*. Journal of Solid Mechanics, Vol. 3 No. 1, 96-113.
- Yaw, L. L. (2009). *2D Corotational Beam Formulation*, 1-17.
https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/Corotational_docs/2Dcorot_beam.pdf, diakses pada tanggal 26 Maret 2016.
- Zhou, X., Huang, K., dan Li, Z. (2018). *Geometrically nonlinear beam analysis of composite wind turbine blades based on quadrature element method*. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 104, 87-99.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.05.007>
- Zupan, E., Saje, M., dan Zupan, D. (2012). *Quaternion-based dynamics of geometrically nonlinear spatial beams using the Runge-Kutta method*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 54, 48-60.